

**PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT**

**PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD**

<b>CONVOCATÒRIA:</b>	<b>2023</b>	<b>CONVOCATORIA:</b>	<b>2023</b>
<b>Assignatura: MATEMÀTIQUES II</b>		<b>Asignatura: MATEMÁTICAS II</b>	

**BAREM DE L'EXAMEN:**

Heu de resoldre només **QUATRE** problemes dels **VUIT** que es proposen.

Cada problema puntua fins a 10.

La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 4, aproximada fins a les centèsimes. Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguin gràfiques o programables i que no puguin fer càlcul simbòlic ni emmagatzemar text ni fórmules en la memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

**BAREMO DEL EXAMEN:**

El alumnado contestará solo **CUATRO** problemas entre los **OCHO** propuestos.

Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.

La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 4 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

**En les respostes heu d'escriure tots els passos del raonament que feu**

**Problema 1.** Donades les matrius  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ :

- Estudieu quan té solució l'equació matricial  $A^2 X = B$  en funció del paràmetre real  $m$ . (4 punts)
- Trobeu totes les solucions de l'equació anterior quan aquestes existisquen. (6 punts)

**Problema 2.** Donades les matrius  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  i  $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$ :

- Obteniu la matriu  $(AB^T + I)^{-1}$ , on  $I$  és la matriu identitat de les dimensions adequades per fer l'operació. (6 punts)
- Comproveu que  $C^2 = -\alpha^3 I$ , on  $I$  és la matriu identitat, i calculeu  $C^{13}$ . (4 punts)

**Problema 3.** Donada la recta  $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$  i els punts  $P = (0, 0, 3)$  i  $Q = (2, 2, a)$ , obtingueu:

- Els valors del paràmetre real  $a$  si existeixen, per als quals són paral·leles la recta  $r$  i la recta que passa pels punts  $P$  i  $Q$ . (6 punts)
- L'equació del pla perpendicular a  $r$  que passa per  $P$ . (4 punts)

**Problema 4.** Donada la recta  $r: \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases}$  i el punt  $P = (0, 5, 2)$ , es demana:

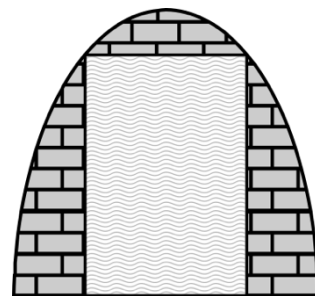
- Comproveu que el punt  $Q = (2, 6, 0)$  pertany a la recta  $r$  i trobeu la recta  $s$  que passa pels punts  $P$  i  $Q$ . (2 punts)
- Obteniu l'angle que formen la recta  $r$  i la recta  $s$ . (3 punts)
- Obteniu la projecció ortogonal del punt  $P$  en la recta  $r$ . (5 punts)

**Problema 5.** Considereu la funció  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x + 1)$ . Obteniu:

- a) El domini i les asímptotes de  $f(x)$ . (2 punts)
- b) Els intervals de creixement i decreixement de  $f(x)$  i els seus màxims i mínims. (4 punts)
- c) L'àrea compresa entre la corba  $y = f(x)$  i les rectes  $y = 0$ ,  $x = 1$  i  $x = 2$ . (4 punts)

**Problema 6.** El tall vertical de l'entrada a la plaça emmurallada de cert poble té forma de paràbola, amb l'equació  $y = -x^2 + 12$ , en la qual  $x$  i  $y$  es mesuren en metres i  $y = 0$  representa el sòl. Es desitja posar-hi una porta rectangular de forma que les dues cantonades superiors estiguen en la paràbola i les inferiors en el sòl. La resta de l'entrada va tancada amb pedra. Calculeu:

- a) Les dimensions de la porta perquè tinga la major superfície possible. (6 punts)
- b) Obtingueu l'àrea de la part frontal de la porta de l'apartat anterior i l'àrea de la part frontal de l'entrada recoberta de pedra. (4 punts)



**Problema 7.** Tenim dues monedes  $M_1$  i  $M_2$ . La probabilitat d'obtenir cara en llançar la moneda  $M_1$  és  $x$  i la probabilitat d'obtenir cara en llançar la moneda  $M_2$  és  $y$ .

- a) Si llancem les dues monedes al mateix temps, calculeu les probabilitats de no obtenir cap cara, d'obtenir-ne només una cara i d'obtenir-ne dues. (3 punts)
- b) Després de llançar les dues monedes, tornem a llançar solament les monedes en les quals no hem obtingut cara. Calculeu les probabilitats que el resultat final siga cap cara, només una cara i dues cares. (7 punts)

**Problema 8.** Cada cap de setmana arriben a l'aeroport d'Alacant 161 vols. D'aquests vols, 95 procedeixen del territori nacional, 50 de la Unió Europea i 16 de països de fora de la Unió Europea. Sabent que es retarden el 5% dels vols de procedència nacional, el 4% dels de procedència de la Unió Europea i el 6,25% de la resta:

- a) Calculeu la probabilitat que es retarde un vol durant el cap de setmana. (5 punts)
- b) Calculeu la probabilitat que un vol que s'ha retardat procedisca de la Unió Europea. (5 punts)

*Els resultats s'han d'expressar en forma de fracció o en forma decimal amb quatre decimals d'aproximació.*

**En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.**

**Problema 1.** Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ :

- Estudiar cuándo la ecuación matricial  $A^2X = B$  tiene solución en función del parámetro real  $m$ . (4 puntos)
- Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan. (6 puntos)

**Problema 2.** Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$ :

- Obtener la matriz  $(AB^T + I)^{-1}$ , donde  $I$  es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación. (6 puntos)
- Comprobar que  $C^2 = -\alpha^3 I$ , donde  $I$  es la matriz identidad, y calcular  $C^{13}$ . (4 puntos)

**Problema 3.** Dada la recta  $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$  y los puntos  $P = (0,0,3)$  y  $Q = (2,2,a)$ , obtener:

- Los valores del parámetro real  $a$ , si existen, para los que son paralelas la recta  $r$  y la recta que pasa por los puntos  $P$  y  $Q$ . (6 puntos)
- La ecuación del plano perpendicular a  $r$  y que pasa por  $P$ . (4 puntos)

**Problema 4.** Dada la recta  $r: \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases}$  y el punto  $P = (0,5,2)$  se pide:

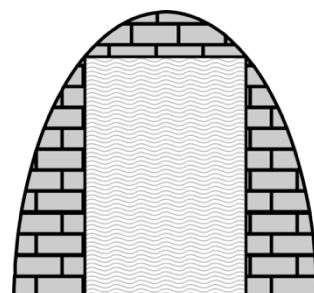
- Comprobar que el punto  $Q = (2,6,0)$  pertenece a la recta  $r$  y encontrar la recta  $s$  que pasa por los puntos  $P$  y  $Q$ . (2 puntos)
- Obtener el ángulo que forman la recta  $r$  y la recta  $s$ . (3 puntos)
- Obtener la proyección ortogonal del punto  $P$  en la recta  $r$ . (5 puntos)

**Problema 5.** Considerar la función  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x + 1)$ . Obtener:

- El dominio y las asíntotas de  $f(x)$ . (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x)$  y sus máximos y mínimos. (4 puntos)
- El área comprendida entre la curva  $y = f(x)$  y las rectas  $y = 0$ ,  $x = 1$  y  $x = 2$ . (4 puntos)

**Problema 6.** El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación  $y = -x^2 + 12$ , donde  $x$  e  $y$  se miden en metros e  $y = 0$  representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:

- Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible. (6 puntos)
- Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra. (4 puntos)



**Problema 7.** Tenemos dos monedas distintas  $M_1$  y  $M_2$ . La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda  $M_1$  es  $x$  y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda  $M_2$  es  $y$ .

- a) Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras. (3 puntos)
- b) Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras. (7 puntos)

**Problema 8.** Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de países de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5% de los vuelos con procedencia nacional, el 4% de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6.25% del resto de vuelos se retrasan:

- a) Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase. (5 puntos)
- b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea. (5 puntos)

*Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.*